

Hong Kong Mathematics Olympiad (2000 – 2001)

Heat Event (Individual)

香港数学竞赛 (2000 – 2001)

初赛项目(个人)

除非特别声明，答案须用数字表达，并化至最简。

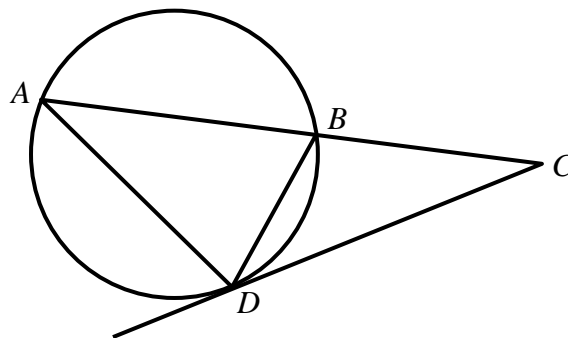
Unless otherwise stated, all answers should be expressed in numerals in their simplest form.

1. 设  $4^a = 25^b = 10$ ，求  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  的值。

If  $4^a = 25^b = 10$  , find the value of  $\frac{1}{a} + \frac{1}{b}$  .

2. 在图一， $ABC$  为一直线， $AB = AD$ ， $\angle BDC = 38^\circ$ ， $CD$  切圆  $ABD$  于  $D$ 。设  $\angle BCD = x^\circ$ ，求  $x$  的值。

In Figure 1,  $ABC$  is a straight line,  $AB = AD$  ,  $\angle BDC = 38^\circ$  ,  $CD$  is a tangent to the circle  $ABD$  . Let  $\angle BCD = x^\circ$  , find the value of  $x$  .



图一

Figure 1

3. 如果  $p = 10x - 4xy - 5x^2 - y^2 - 8$ ，其中  $x$  和  $y$  为实数，求  $p$  的最大值。

If  $p = 10x - 4xy - 5x^2 - y^2 - 8$  where  $x$  and  $y$  are real numbers , find the largest value of  $p$  .

4. 如果下列三条直线相交于一点，求  $c$  的值。

$$L_1: 6x + 6y - 19 = 0$$

$$L_2: 18x + 12y + c = 0$$

$$L_3: 2x + 3y - 8 = 0$$

If the following three straight lines intersect at one point, find the value of  $c$ .

$$L_1: 6x + 6y - 19 = 0$$

$$L_2: 18x + 12y + c = 0$$

$$L_3: 2x + 3y - 8 = 0$$

5. 已知  $2 - 6\cos^2\theta = 7\sin\theta\cos\theta$ ，求  $\tan\theta$  的最大值。

It is known that  $2 - 6\cos^2\theta = 7\sin\theta\cos\theta$ , find the largest value of  $\tan\theta$ .

6. 88 张成人车票总值为 \$ \_{293}\_ \$，由于打印机坏了，五位数字的首尾两个数字印不出来。已知每张车票的价值为 \$ P \$，其中  $P$  为一整数，求  $P$  的值。

The total cost for 88 adult tickets was \$ \_{293}\_ . Because the printing machine was not functioning well, the first and the last digits of the 5-digit number were missing. If the cost for each ticket is \$  $P$ , where  $P$  is an integer, find the value of  $P$ .

7. 如果  $p$  为方程式  $2x^3 + 7x^2 - 29x - 70 = 0$  的正实数根，求  $p$  的值。

If  $p$  is the positive real root of  $2x^3 + 7x^2 - 29x - 70 = 0$ , find the value of  $p$ .

8. 甲、乙二人合作做一件工程，30 天便可完工。如果两人只合作了 6 天，甲便退出，乙须独自继续做 40 天才能完工。如果甲每天完成工程的  $\frac{1}{q}$ ，求  $q$  的数值。

Two persons  $A$ ,  $B$  can complete a task in 30 days when they work together. If they work together for 6 days and then  $A$  quits,  $B$  needs 40 more days in order to complete the task. If the proportion of the task  $A$  can finish each day is  $\frac{1}{q}$ , find the value of  $q$ .

9. 设  $a$ 、 $b$ 、 $c$  为三个相异常数。已知

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a+x)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)(b+x)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c+x)} \equiv \frac{p+qx+rx^2}{(a+x)(b+x)(c+x)},$$

其中  $p$ 、 $q$ 、 $r$  为常数，且  $s=7p+8q+9r$ ，求  $s$  的值。

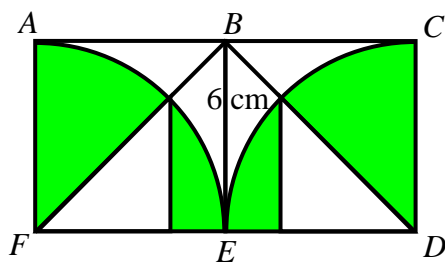
Let  $a$ ,  $b$ ,  $c$  be three distinct constants. It is given that

$$\frac{a^2}{(a-b)(a-c)(a+x)} + \frac{b^2}{(b-c)(b-a)(b+x)} + \frac{c^2}{(c-a)(c-b)(c+x)} \equiv \frac{p+qx+rx^2}{(a+x)(b+x)(c+x)},$$

where  $p$ ,  $q$ ,  $r$  are constants, and  $s=7p+8q+9r$ , find the value of  $s$ .

10. 如图二， $ABEF$ 、 $BCDE$  为正方形， $BE=6$  cm， $\widehat{AE}$  及  $\widehat{CE}$  是分别以  $F$ 、 $D$  为圆心画出来的弧。如果图中阴影部分的总面积为  $S$   $\text{cm}^2$ ，求  $S$  的数值。(取  $\pi=3$ )

In Figure 2,  $ABEF$ ,  $BCDE$  are two squares,  $BE=6$  cm, and  $\widehat{AE}$  and  $\widehat{CE}$  are arcs drawn with centres  $F$  and  $D$  respectively. If the total area of the shaded part is  $S$   $\text{cm}^2$ , find the value of  $S$ . (Assume  $\pi=3$ )



图二

Figure 2